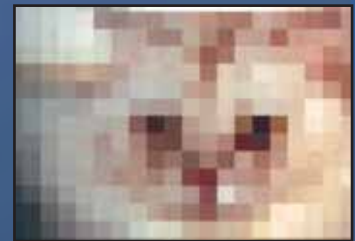


# Θεμελιώδεις Έννοιες της Επεξεργασίας Σημάτων

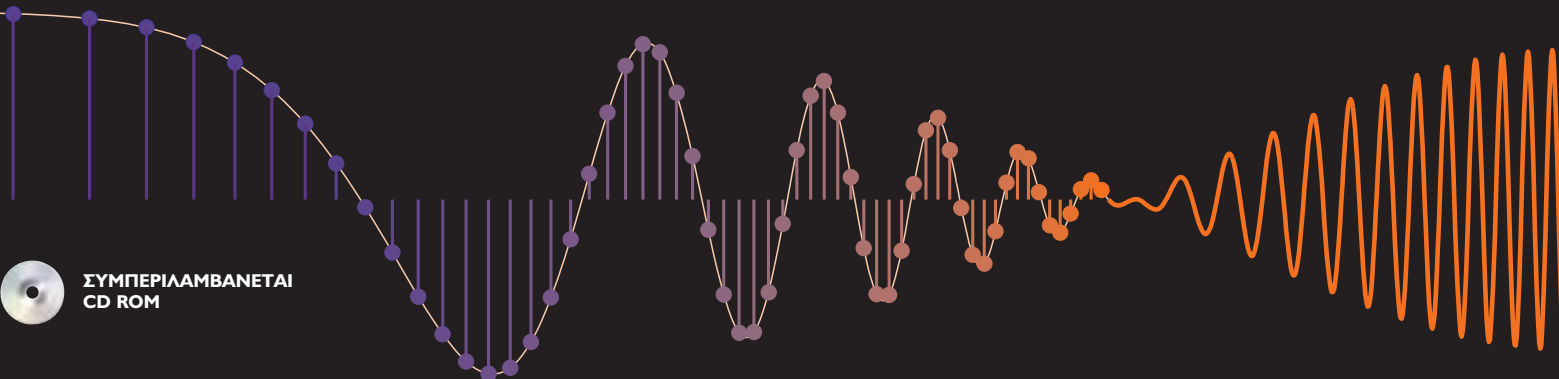
James H. McClellan  
Ronald W. Schafer  
Mark A. Yoder

Μετάφραση – Επιστημονική επιμέλεια  
Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης

**GOTSIS**  
ΕΚΔΟΣΕΙΣ



ΣΥΜΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ  
CD ROM





# Περιεχόμενα

<b>Πρόλογος Μεταφραστή</b>	<b>xiii</b>
<b>Πρόλογος Συγγραφέων</b>	<b>xv</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1-1 Μαθηματική Περιγραφή των Σημάτων . . . . .	2
1-2 Μαθηματική Περιγραφή των Συστημάτων . . . . .	4
1-3 Σκέψεις για τα Συστήματα . . . . .	6
1-4 Το Επόμενο Βήμα . . . . .	6
<b>2 Ημιτονοειδή Σήματα</b>	<b>9</b>
2-1 Το Πείραμα του Διαπασών . . . . .	10
2-2 Οι Συναρτήσεις Ημιτόνου και Συνημιτόνου . . . . .	11
2-3 Συνημιτονοειδή Σήματα . . . . .	13

2-3.1	Σχέση Συχνότητας και Περιόδου . . . . .	14
2-3.2	Διαφορά Φάσης και Χρονική Ολίσθηση . . . . .	16
2-4	Δειγματοληψία και Σχεδίαση Ημιτονοειδών . . . . .	18
2-5	Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα και Φάσορες . . . . .	20
2-5.1	Μιγαδικοί Αριθμοί . . . . .	20
2-5.2	Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα . . . . .	21
2-5.3	Ερμηνεία με τη Χρήση Περιστρεφόμενου Φάσορα . . . . .	22
2-5.4	Οι Αντίστροφες Σχέσεις του Euler . . . . .	24
2-6	Πρόσθεση Φασόρων . . . . .	25
2-6.1	Πρόσθεση Μιγαδικών Αριθμών . . . . .	26
2-6.2	Πρόσθεση Φασόρων . . . . .	27
2-6.3	Παράδειγμα Πρόσθεσης Φασόρων . . . . .	28
2-6.4	Πρόσθεση Φασόρων στο <b>MATLAB</b> . . . . .	28
2-6.5	Σύνοψη της Πρόσθεσης Φασόρων . . . . .	29
2-7	Η Φυσική του Διαπασών . . . . .	30
2-7.1	Εξισώσεις από Νόμους της Φυσικής . . . . .	31
2-7.2	Γενική Λύση της Διαφορικής Εξίσωσης . . . . .	32
2-7.3	Ακούγοντας Τόνους . . . . .	33
2-8	Άλλα Ημιτονοειδή Χρονικά Σήματα . . . . .	33
2-9	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι . . . . .	34
2-10	Προβλήματα . . . . .	35

### 3 Φάσμα Σήματος

41

3-1	Το Φάσμα Αθροίσματος Ημιτονοειδών . . . . .	42
3-1.1	Αλλαγή Συμβολισμού . . . . .	43
3-1.2	Γραφική Παράσταση Φάσματος . . . . .	43
3-2	Διακροτήματα . . . . .	44
3-2.1	Γινόμενο Ημιτονοειδών . . . . .	44
3-2.2	Κυματομορφή Διακροτήματος . . . . .	45
3-2.3	Διαμόρφωση Πλάτους . . . . .	47
3-3	Περιοδικές Κυματομορφές . . . . .	49
3-3.1	Συνθετικό Φωνήεν . . . . .	49
3-3.2	Παράδειγμα ενός μη Περιοδικού Σήματος . . . . .	51
3-4	Σειρές Fourier . . . . .	53
3-4.1	Σειρές Fourier: Ανάλυση . . . . .	54
3-4.2	Παραγωγή Σειρών Fourier . . . . .	54
3-5	Το Φάσμα των Σειρών Fourier . . . . .	56
3-6	Ανάλυση Fourier Περιοδικών Σημάτων . . . . .	57

3-6.1	Το Τετραγωνικό Κύμα . . . . .	58
3-6.1.1	Η Τιμή του Σταθερού Συντελεστή . . . . .	59
3-6.2	Το Φάσμα ενός Τετραγωνικού Κύματος . . . . .	60
3-6.3	Σύνθεση Ενός Τετραγωνικού Κύματος . . . . .	60
3-6.4	Τριγωνικό Κύμα . . . . .	61
3-6.5	Σύνθεση Τριγωνικού Σήματος . . . . .	62
3-6.6	Σύγκλιση της Σχέσης Σύνθεσης Fourier . . . . .	63
3-7	Θεώρημα Parseval . . . . .	63
3-8	Η Φύση της Προσέγγισης των Σειρών Fourier . . . . .	65
3-8.1	Σύγκλιση Σειρών Fourier . . . . .	65
3-9	Χρονο-Συχνотικό Φάσμα . . . . .	67
3-9.1	Τμηματικά Σταθερή Συχνότητα . . . . .	69
3-9.2	Ανάλυση Φασματογραφήματος . . . . .	69
3-10	Διαμόρφωση Συχνότητας: Τερέτισμα . . . . .	70
3-10.1	Τερέτισμα ή Σήμα Συχνότητας Γραμμικής Σάρωσης . . . . .	70
3-10.2	Μια Κοντινότερη ματιά στη Στιγμαία Συχνότητα . . . . .	72
3-11	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι . . . . .	73
3-12	Προβλήματα . . . . .	74

## 4 Δειγματοληψία και Ψευδώνυμα Συχνοτήτων

81

4-1	Δειγματοληψία . . . . .	81
4-1.1	Δειγματοληψία Ημιτονοειδών Σημάτων . . . . .	83
4-1.2	Τα Ψευδώνυμα των Συχνοτήτων . . . . .	85
4-1.3	Φάσμα Σήματος Διακριτού Χρόνου . . . . .	87
4-1.4	Το Θεώρημα Δειγματοληψίας . . . . .	88
4-1.5	Ψευδώνυμα Συχνοτήτων . . . . .	88
4-1.6	Αναδίπλωση . . . . .	89
4-1.7	Ιδανική Ανακατασκευή . . . . .	89
4-2	Φασματική Ερμηνεία Δειγματοληψίας και Ανακατασκευής . . . . .	90
4-2.1	Φάσμα Σήματος Διακριτού Χρόνου που Προκύπτει από Δειγματοληψία . . . . .	91
4-2.2	Υπερδειγματοληψία . . . . .	91
4-2.3	Ψευδώνυμα από Υποδειγματοληψία . . . . .	93
4-2.4	Αναδίπλωση από Υποδειγματοληψία . . . . .	94
4-2.5	Μέγιστη Συχνότητα Ανακατασκευής . . . . .	95
4-3	Επίδειξη Στροβοσκοπίου . . . . .	96
4-3.1	Ερμηνεία με Χρήση του Φάσματος . . . . .	99
4-4	Μετατροπή Διακριτού-σε-Συνεχές . . . . .	101
4-4.1	Παρεμβολή με Παλμούς . . . . .	101

4-4.2	Παρεμβολή Συγκράτησης Μηδενικής Τάξης . . . . .	102
4-4.3	Γραμμική Παρεμβολή . . . . .	102
4-4.4	Παρεμβολή Κυβικής Spline . . . . .	103
4-4.5	Υπερδειγματοληψία και Παρεμβολή . . . . .	104
4-4.6	Ιδανική Παρεμβολή Περιορισμένου Εύρους . . . . .	105
4-5	Θεώρημα Δειγματοληψίας . . . . .	106
4-6	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι . . . . .	108
4-7	Προβλήματα . . . . .	109

## 5 FIR Φίλτρα

115

5-1	Συστήματα Διακριτού Χρόνου . . . . .	116
5-2	Φίλτρο Τρέχουσας Μέσης Τιμής . . . . .	116
5-3	Το Γενικό FIR Φίλτρο . . . . .	119
5-3.1	Ερμηνεία του FIR Φιльтраρίσματος . . . . .	120
5-3.2	Η Μοναδιαία Κρουστική Απόκριση . . . . .	122
5-3.2.1	Η Μοναδιαία Κρουστική Ακολουθία . . . . .	122
5-3.2.2	Ακολουθία Μοναδιαίας Κρουστικής Απόκρισης . . . . .	123
5-3.2.3	Το Σύστημα Μοναδιαίας Καθυστερήσης . . . . .	124
5-3.3	Συνέλιξη και FIR Φίλτρα . . . . .	124
5-3.3.1	Υπολογίζοντας την Έξοδο της Συνέλιξης . . . . .	125
5-3.3.2	Η Συνέλιξη στο Περιβάλλον MATLAB . . . . .	126
5-4	Υλοποίηση των FIR Φίλτρων . . . . .	126
5-4.1	Δομικά Στοιχεία . . . . .	127
5-4.1.1	Πολλαπλασιαστής . . . . .	127
5-4.1.2	Αθροιστής . . . . .	127
5-4.1.3	Μοναδιαία Καθυστερήση . . . . .	127
5-4.2	Σχηματικά Διαγράμματα . . . . .	128
5-4.2.1	Άλλα Σχηματικά Διαγράμματα . . . . .	129
5-4.2.2	Εσωτερικές Λεπτομέρειες Υλικού . . . . .	130
5-5	Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα (ΓΧΑ) Συστήματα . . . . .	131
5-5.1	Χρονική Αμεταβλητότητα . . . . .	131
5-5.2	Γραμμικότητα . . . . .	132
5-5.3	Η Περίπτωση του FIR Συστήματος . . . . .	133
5-6	Συνέλιξη και ΓΧΑ Συστήματα . . . . .	134
5-6.1	Συνελικτικό Άθροισμα . . . . .	134
5-6.2	Μερικές Ιδιότητες των ΓΧΑ συστημάτων . . . . .	135
5-6.2.1	Η Συνέλιξη ως Τελεστής . . . . .	135
5-6.2.2	Αντιμεταθετική Ιδιότητα της Συνέλιξης . . . . .	136

5-6.2.3	Προσεταιριστική Ιδιότητα της Συνέλιξης . . . . .	137
5-7	ΓΧΑ Συστήματα σε Σειρά . . . . .	137
5-8	Παράδειγμα FIR Φιλτραρίσματος . . . . .	139
5-9	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι . . . . .	141
5-10	Προβλήματα . . . . .	142

## 6 Απόκριση Συχνότητας FIR Φίλτρων 147

6-1	Απόκριση των FIR συστημάτων σε Ημιτονοειδής Διεγέρσεις . . . . .	147
6-2	Υπέρθωση και Απόκριση Συχνότητας . . . . .	149
6-3	Μεταβατική Απόκριση και Απόκριση Μόνιμης Κατάστασης . . . . .	152
6-4	Ιδιότητες της Απόκρισης Συχνότητας . . . . .	154
6-4.1	Σχέση της Κρουστικής Απόκρισης και της Εξίσωσης Διαφορών . . . . .	154
6-4.2	Περιοδικότητα της $H(e^{j\omega})$ . . . . .	155
6-4.3	Συζυγής Συμμετρία . . . . .	155
6-5	Γραφική Παράσταση της Απόκρισης Συχνότητας . . . . .	156
6-5.1	Σύστημα Καθυστέρησης . . . . .	156
6-5.2	Σύστημα Διαφορών Πρώτης Τάξης . . . . .	157
6-5.3	Ένα Απλό Φίλτρο Διέλευσης χαμηλών Συχνοτήτων . . . . .	159
6-6	ΓΧΑ Συστήματα Συνδεδεμένα σε Σειρά . . . . .	161
6-7	Φίλτρο Τρέχουσας Μέσης Τιμής . . . . .	162
6-7.1	Σχεδιάζοντας την Απόκριση Συχνότητας . . . . .	163
6-7.2	Αποκρίσεις Μέτρου και Φάσης . . . . .	165
6-7.3	Πείραμα: Εξομάλυνση Εικόνας . . . . .	166
6-8	Φιλτράροντας Δειγματοληπτημένα Σήματα Συνεχούς Χρόνου . . . . .	169
6-8.1	Παράδειγμα: Κατωπερατό Φίλτρο Τρέχουσας Μέσης Τιμής . . . . .	170
6-8.2	Ερμηνεία της Καθυστέρησης . . . . .	172
6-9	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι . . . . .	174
6-10	Προβλήματα . . . . .	174

## 7 Μετασχηματισμός-z 181

7-1	Ορισμός Μετασχηματισμού-z . . . . .	182
7-2	Μετασχηματισμός-z και τα Γραμμικά Συστήματα . . . . .	184
7-2.1	Ο Μετασχηματισμός-z ενός FIR Φίλτρου . . . . .	184
7-3	Ιδιότητες του Μετασχηματισμού- z . . . . .	186
7-3.1	Η ιδιότητα της υπέρθεσης του Μετασχηματισμού-z . . . . .	186
7-3.2	Η Ιδιότητα της Χρονικής Καθυστέρησης του Μετασχηματισμού-z . . . . .	187

7-3.3	Ένας Γενικός Τύπος για τον Μετασχηματισμό- $z$ . . . . .	187
7-4	Ο Μετασχηματισμός- $z$ ως Τελεστής . . . . .	188
7-4.1	Τελεστής Μοναδιαίας Καθυστέρησης . . . . .	188
7-4.2	Τελεστικός Συμβολισμός . . . . .	188
7-4.3	Τελεστικός Συμβολισμός σε Σχηματικά Διαγράμματα . . . . .	189
7-5	Συνέλιξη και Μετασχηματισμός- $z$ . . . . .	189
7-5.1	Σύνδεση Συστημάτων σε Σειρά . . . . .	192
7-5.2	Παραγοντοποίηση Πολυωνύμων- $z$ . . . . .	193
7-5.3	Αποσυνέλιξη . . . . .	194
7-6	Σχέση Ανάμεσα στο Πεδίο- $z$ και το Πεδίο- $\hat{\omega}$ . . . . .	194
7-6.1	Το Επίπεδο- $z$ και ο Μοναδιαίος Κύκλος . . . . .	195
7-6.2	Τα Μηδενικά και οι Πόλοι της $H(z)$ . . . . .	196
7-6.3	Η Σημαντικότητα των Μηδενικών της $H(z)$ . . . . .	197
7-6.4	Φίλτρα Ακύρωσης . . . . .	198
7-6.5	Γραφική Σχέση μεταξύ $z$ και $\hat{\omega}$ . . . . .	199
7-7	Χρήσιμα Φίλτρα . . . . .	200
7-7.1	Φίλτρο Τρέχουσας Μέσης Τιμής Μήκους $L$ . . . . .	201
7-7.2	Ένα Μιγαδικό Φίλτρο Διέλευσης Ζώνης Συχνοτήτων . . . . .	203
7-7.3	Ένα Ζωνοπερατό Φίλτρο με Πραγματικούς Συντελεστές . . . . .	205
7-8	Πρακτικός Σχεδιασμός Φίλτρου Διέλευσης Ζώνης Συχνοτήτων . . . . .	206
7-9	Ιδιότητες Φίλτρων Γραμμικής Φάσης . . . . .	209
7-9.1	Η συνθήκη Γραμμικής Φάσης . . . . .	209
7-9.2	Θέσεις των Μηδενικών FIR Συστημάτων Γραμμικής Φάσης . . . . .	210
7-10	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι . . . . .	210
7-11	Προβλήματα . . . . .	211

## 8 ΠΡ Φίλτρα

217

8-1	Η Γενική Εξίσωση Διαφορών των ΠΡ Συστημάτων . . . . .	218
8-2	Απόκριση στο Πεδίο του Χρόνου . . . . .	219
8-2.1	Η Γραμμικότητα και η Χρονική Αμεταβλητότητα των ΠΡ Συστημάτων . . . . .	221
8-2.2	Η Κρουστική Απόκριση ΠΡ συστήματος Πρώτης Τάξης . . . . .	221
8-2.3	Απόκριση σε Εισόδους Πεπερασμένου Μήκους . . . . .	223
8-2.4	Βηματική Απόκριση ενός Αναδρομικού Συστήματος Πρώτης Τάξης . . . . .	224
8-3	Η Συνάρτηση Μεταφοράς ενός ΠΡ Φίλτρου . . . . .	226
8-3.1	Η Γενική Περίπτωση Πρώτης Τάξης ΠΡ Συστήματος . . . . .	226
8-3.2	Η Συνάρτηση Μεταφοράς και Σχηματικά Διαγράμματα Δομών Υλοποίησης . . . . .	227
8-3.2.1	Δομή Απευθείας Υλοποίησης Τύπου I . . . . .	228
8-3.2.2	Δομή Απευθείας Υλοποίησης Τύπου II . . . . .	229

8-3.2.3	Η Δομή Ανάστροφης Υλοποίησης . . . . .	229
8-3.3	Η Σχέση με την Κρουστική Απόκριση . . . . .	231
8-3.4	Σύνοψη της Μεθόδου . . . . .	232
8-4	Πόλοι και Μηδενικά . . . . .	232
8-4.1	Πόλοι και Μηδενικά στο Μηδέν και το Άπειρο . . . . .	233
8-4.2	Θέσεις Πόλων και Ευστάθεια . . . . .	233
8-5	Απόκριση Συχνότητας ενός IIR Φίλτρου . . . . .	234
8-5.1	Απόκριση Συχνότητας χρησιμοποιώντας <b>MATLAB</b> . . . . .	236
8-5.2	Γραφική Παράσταση Τριών Διαστάσεων της Συνάρτησης Μεταφοράς . . . . .	237
8-6	Τα Τρία Πεδία . . . . .	238
8-7	Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός- $z$ και κάποιες Εφαρμογές . . . . .	239
8-7.1	Επανεξέταση της Βηματικής Απόκρισης ενός Συστήματος Πρώτης Τάξης . . . . .	239
8-7.2	Υπολογισμός του Αντίστροφου Μετασχηματισμού- $z$ . . . . .	241
8-8	Απόκριση Μόνιμης Κατάστασης και Ευστάθεια . . . . .	243
8-9	Φίλτρα Δεύτερης Τάξης . . . . .	246
8-9.1	Ο μετασχηματισμός- $z$ των Δεύτερης Τάξης Φίλτρων . . . . .	246
8-9.2	Δομές IIR Συστημάτων Δεύτερης Τάξης . . . . .	247
8-9.3	Πόλοι και Μηδενικά . . . . .	249
8-9.4	Κρουστική απόκριση ενός IIR Συστήματος Δεύτερης Τάξης . . . . .	250
8-9.4.1	Πραγματικοί Πόλοι . . . . .	251
8-9.5	Μιγαδικοί Πόλοι . . . . .	252
8-10	Απόκριση συχνότητας IIR φίλτρων Δεύτερης Τάξης . . . . .	255
8-10.1	Απόκριση Συχνότητας στο <b>MATLAB</b> . . . . .	256
8-10.2	Εύρος Ζώνης (3-dB) . . . . .	257
8-10.3	Τρισδιάστατη Γραφική Παράσταση Συναρτήσεων Μεταφοράς . . . . .	258
8-11	Παράδειγμα Κατωπερατού IIR Φίλτρου . . . . .	259
8-12	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι . . . . .	262
8-13	Προβλήματα . . . . .	263

## 9 Σήματα και ΓΧΑ-Συστήματα Συνεχούς-Χρόνου 271

9-1	Σήματα Συνεχούς-Χρόνου . . . . .	272
9-1.1	Δίπλευρα Άπειρου Μήκους Σήματα . . . . .	272
9-1.2	Μονόπλευρα Σήματα . . . . .	273
9-1.3	Σήματα Πεπερασμένου Μήκους . . . . .	274
9-2	Μοναδιαία Κρουστική Συνάρτηση . . . . .	275
9-2.1	Δειγματοληψία και Κρουστικό Σήμα . . . . .	277
9-2.2	Αυστηρός Μαθηματικός Ορισμός . . . . .	279
9-2.3	Πραγματικότητα . . . . .	279



9-2.4	Παράγωγος του Μοναδιαίου Βηματικού Σήματος . . . . .	279
9-3	Συστήματα Συνεχούς Χρόνου . . . . .	281
9-3.1	Μερικά Βασικά Συστήματα Συνεχούς Χρόνου . . . . .	282
9-3.2	Συνεχούς Χρόνου Έξοδοι . . . . .	282
9-3.3	Αντίστοιχα Συστήματα Διακριτού Χρόνου . . . . .	282
9-4	Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα . . . . .	283
9-4.1	Χρονική-Αμεταβλητότητα . . . . .	283
9-4.2	Γραμμικότητα . . . . .	284
9-4.3	Το Συνελικτικό Ολοκλήρωμα . . . . .	285
9-4.4	Ιδιότητες της Συνέλιξης . . . . .	287
9-5	Κρουστικές Αποκρίσεις Βασικών ΓΧΑ Συστημάτων . . . . .	288
9-5.1	Ολοκληρωτής . . . . .	288
9-5.2	Διαφοριστής . . . . .	288
9-5.3	Ιδανική Καθυστερήση . . . . .	289
9-6	Συνέλιξη Κρουστικών Συναρτήσεων . . . . .	289
9-7	Υπολογισμός Συνελικτικών Ολοκληρωμάτων . . . . .	291
9-7.1	Χρονικά Καθυστερημένη Μοναδιαία Βηματική Είσοδος . . . . .	291
9-7.2	Υπολογισμός Συνελικτικών Αθροισμάτων . . . . .	295
9-7.3	Διέγερση Συστήματος από Τετραγωνικό Παλμό . . . . .	297
9-7.4	Διέγερση Συστήματος από Βραχύβιο Τετραγωνικό Παλμό . . . . .	298
9-7.5	Συζήτηση . . . . .	298
9-8	Ιδιότητες των ΓΧΑ Συστημάτων . . . . .	299
9-8.1	Συνδεσμολογίες Συστημάτων σε Σειρά και Παράλληλα . . . . .	299
9-8.2	Διαφόριση και Ολοκλήρωση της Συνέλιξης . . . . .	301
9-8.3	Ευστάθεια και Αιτιατότητα . . . . .	303
9-9	Χρήση της Συνέλιξη για την Απομάκρυνση Παραμορφώσεων που Οφείλονται στην Πολυόδευση . . . . .	306
9-10	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι . . . . .	308
9-11	Προβλήματα . . . . .	309

## 10 Απόκριση Συχνότητας

317

10-1	Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας των ΓΧΑ Συστημάτων . . . . .	317
10-1.1	Σχεδιάζοντας την Απόκριση Συχνότητας . . . . .	319
10-1.1.1	Λογαριθμική Κλίμακα . . . . .	319
10-1.2	Αλλαγές Μέτρου και Φάσης . . . . .	320
10-2	Απόκριση σε Πραγματικά Ημιτονοειδή Σήματα . . . . .	322
10-2.1	Συνημιτονικοί Είσοδοι . . . . .	322
10-2.2	Συμμετρία της $H(j\omega)$ . . . . .	323
10-2.3	Απόκριση σε Άθροισμα Ημιτονοειδών . . . . .	324

10-2.4	Απόκριση ΓΧΑ Συστημάτων σε Περιοδικές Διεγέρσεις . . . . .	326
10-3	Ιδανικά Φίλτρα . . . . .	328
10-3.1	Ιδανικό Σύστημα Καθυστέρησης . . . . .	328
10-3.2	Ιδανικό Κατωπερατό Φίλτρο . . . . .	329
10-3.3	Ιδανικό Υψηπερατό Φίλτρο . . . . .	329
10-3.4	Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο . . . . .	330
10-4	Εφαρμογές των Ιδανικών Φίλτρων . . . . .	331
10-5	Πεδίο Χρόνου ή Πεδίο Συχνότητας; . . . . .	333
10-6	Ανακεφαλαίωση-Μελλοντικές Κατευθύνσεις . . . . .	334
10-7	Προβλήματα . . . . .	335

## 11 Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου 341

11-1	Ορισμός Μετασχηματισμού Fourier . . . . .	342
11-2	Μετασχηματισμός Fourier και Φάσμα . . . . .	344
11-2.1	Το Όριο της Σειράς Fourier . . . . .	344
11-3	Ύπαρξη και Σύγκλιση του Μετασχηματισμού Fourier . . . . .	346
11-4	Παραδείγματα Μετασχηματισμών Fourier . . . . .	347
11-4.1	Πραγματικά Εκθετικά Σήματα Δεξιάς Επέκτασης . . . . .	347
11-4.1.1	Εύρος Ζώνης και Ρυθμός Απόσβεσης . . . . .	349
11-4.2	Σήματα Ορθογώνιου Παλμού . . . . .	349
11-4.3	Σήματα Περιορισμένου Εύρους Ζώνης . . . . .	351
11-4.4	Κρουστικά Σήματα στο Χρόνο και τη Συχνότητα . . . . .	352
11-4.5	Ημιτονικά Σήματα . . . . .	352
11-4.6	Περιοδικά Σήματα . . . . .	354
11-5	Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier . . . . .	356
11-5.1	Ιδιότητα Κλιμάκωσης . . . . .	357
11-5.2	Συμμετρίες Μετασχηματισμού Fourier . . . . .	359
11-6	Ιδιότητα Συνέλιξης . . . . .	361
11-6.1	Απόκριση Συχνότητας . . . . .	361
11-6.2	Μετασχηματισμός Fourier Συνέλιξης . . . . .	362
11-6.3	Παραδείγματα Χρήσης της Ιδιότητας της Συνέλιξης . . . . .	363
11-6.3.1	Συνέλιξη δυο Συναρτήσεων Περιορισμένου Εύρους Ζώνης . . . . .	363
11-6.3.2	Γινόμενο δύο Συναρτήσεων Sinc . . . . .	364
11-6.3.3	Μέθοδος Διάσπασης σε απλά κλάσματα . . . . .	365
11-7	Βασικά ΓΧΑ συστήματα . . . . .	367
11-7.1	Χρονική Καθυστέρηση . . . . .	367
11-7.2	Διαφόριση . . . . .	368
11-7.3	Συστήματα που περιγράφονται από Διαφορικές Εξισώσεις . . . . .	369

11-8	Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού . . . . .	370
11-8.1	Γενική Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού . . . . .	371
11-8.2	Ιδιότητα Ολίσθησης στη Συχνότητα . . . . .	372
11-9	Πίνακας Ιδιοτήτων και Ζευγών Μετασχηματισμού Fourier . . . . .	373
11-10	Ο Μετασχηματισμός Fourier στην Ανάλυση της Πολυόδευσης . . . . .	373
11-11	Ανακεφαλαίωση . . . . .	376
11-12	Προβλήματα . . . . .	376

## 12 Φιλτράρισμα, Διαμόρφωση και Δειγματοληψία

383

12-1	Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα . . . . .	383
12-1.1	Σύνδεση Συστημάτων σε Σειρά και Παράλληλα . . . . .	384
12-1.2	Ιδανικό Σύστημα Καθυστέρησης . . . . .	385
12-1.3	Φίλτρα Διέλευσης Συχνοτήτων . . . . .	388
12-1.3.1	Ιδανικό Φίλτρο Διέλευσης Χαμηλών Συχνοτήτων . . . . .	389
12-1.3.2	Άλλα Ιδανικά Φίλτρα Διέλευσης Συχνοτήτων . . . . .	391
12-1.4	Παράδειγμα Φιλτραρίσματος Στο Πεδίο της Συχνότητας . . . . .	391
12-1.5	Αντιστάθμιση Επίδρασης ενός ΓΧΑ Φίλτρου . . . . .	392
12-2	Ημιτονοειδής Διαμόρφωση Πλάτους . . . . .	396
12-2.1	Διαμόρφωση Πλάτους Διπλής Πλευρικής Ζώνης . . . . .	397
12-2.2	Σύστημα Διαμόρφωσης DSBAM με Μεταδιδόμενο Φέρον (DSBAM-TC) . . . . .	401
12-2.3	Πολύπλεξη Διαίρεσης Συχνότητας . . . . .	405
12-3	Δειγματοληψία και Ανακατασκευή . . . . .	407
12-3.1	Το θεώρημα Δειγματοληψίας και το Φαινόμενο της Ψευδωνμίας . . . . .	407
12-3.2	Ανακατασκευή Σήματος Περιορισμένου Εύρους Ζώνης . . . . .	409
12-3.3	Παρεμβολή Περιορισμένου Εύρους Ζώνης . . . . .	412
12-3.4	Ιδανικοί Μετατροπείς Σ-σε-Δ και Δ-σε-Σ . . . . .	413
12-3.5	Ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού-Χρόνου . . . . .	414
12-3.6	Ο Αντίστροφος DTFT . . . . .	416
12-3.7	Επεξεργασία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου με Συστήματα Διακριτού χρόνου . . . . .	417
12-4	Ανακεφαλαίωση . . . . .	420
12-5	Προβλήματα . . . . .	421

## 13 Υπολογισμός Φάσματος

429

13-1	Πεπερασμένο Άθροισμα Fourier . . . . .	430
13-2	Πολλοί Μετασχηματισμοί Fourier; . . . . .	432
13-2.1	Σχέση του DTFT με τον CTFT . . . . .	433

13-2.2	Σχέση του DFT με τον DTFT	433
13-2.3	Σχέση του DFT με τον CTFT	434
13-3	Χρονική Παραθύρωση	434
13-4	Ανάλυση Αθροίσματος Ημιτόνων	435
13-4.1	Ο DTFT ενός Παραθυρωμένου Ημιτονοειδούς Σήματος	440
13-5	Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier	441
13-5.1	Ο Αντίστροφος DFT	441
13-5.2	Σύνοψη της Παρουσίασης του DFT	442
13-5.3	Ο Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier (FFT)	443
13-5.4	Περιοδικά Σήματα και ο DFT	444
13-5.5	Οι Αρνητικές Συχνότητες και ο DFT	444
13-5.6	Παράδειγμα DFT	445
13-6	Φασματική Ανάλυση Σημάτων Πεπερασμένου Μήκους	447
13-7	Φασματική Ανάλυση Περιοδικών Σημάτων	449
13-8	Το Φασματογράφημα	450
13-8.1	Απεικόνιση Φασματογραφήματος	451
13-8.2	Φασματογραφήματα στο <b>MATLAB</b>	452
13-8.3	Φασματογράφημα Περιοδικού Δειγματοληπτημένου Σήματος	452
13-8.4	Διακριτική Ικανότητα	453
13-8.4.1	Πείραμα Διακριτικής Ικανότητας	454
13-8.5	Φασματογράφημα Μουσικής Κλίμακας	456
13-8.6	Φασματογράφημα Σήματος Ομιλίας	457
13-8.7	Φιλτραρισμένο Σήμα Ομιλίας	461
13-9	Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier	462
13-9.1	Παραγωγή του FFT	462
13-9.1.1	Υπολογιστικό Κόστος FFT	464
13-10	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι	466
13-11	Προβλήματα	467

## A Μιγαδικοί Αριθμοί

471

A-1	Εισαγωγή	472
A-2	Συμβολισμός Μιγαδικών Αριθμών	472
A-2.1	Τετραγωνική Μορφή	473
A-2.2	Πολική Μορφή	473
A-2.3	Μετατροπές: Τετραγωνική και Πολική	474
A-2.4	Ιδιαιτερότητες Δεύτερου και Τρίτου Τεταρτημορίου	475
A-3	Ο Τύπος του Euler	476
A-3.1	Οι Αντίστροφες Σχέσεις του Euler	476

A-4	Αλγεβρικοί Κανόνες Μιγαδικών Αριθμών . . . . .	477
	A-4.1 Ασκήσεις με Μιγαδικούς Αριθμούς . . . . .	478
A-5	Γεωμετρική Ερμηνεία των Μιγαδικών Πράξεων . . . . .	479
	A-5.1 Γεωμετρική Ερμηνεία της Πρόσθεσης . . . . .	479
	A-5.2 Γεωμετρική Ερμηνεία της Αφαίρεσης . . . . .	480
	A-5.3 Γεωμετρική Ερμηνεία του Πολλαπλασιασμού . . . . .	482
	A-5.4 Γεωμετρική Ερμηνεία της Διαίρεσης . . . . .	482
	A-5.5 Γεωμετρική Ερμηνεία του Αντίστροφου . . . . .	482
	A-5.6 Γεωμετρική Ερμηνεία του Συζυγή, $z^*$ . . . . .	483
A-6	Δυνάμεις και Ρίζες . . . . .	483
	A-6.1 Οι Ρίζες της Μονάδας . . . . .	484
	A-6.1.1 Διαδικασία Εύρεσης Πολλαπλών Ριζών . . . . .	484
A-7	Ανακεφαλαίωση και Σύνδεσμοι . . . . .	486
A-8	Προβλήματα . . . . .	486

## **B Εργαστηριακές Ασκήσεις** **489**

## **Ευρετήριο** **491**

# Κ Ε Φ Α 1 Λ Α Ι Ο



## Εισαγωγή

Στην εποχή των πολυμεσικών υπολογιστών, των ηχητικών και τηλεοπτικών συστημάτων ψυχαγωγίας και των ψηφιακών συστημάτων επικοινωνιών, είναι σχεδόν σίγουρο ότι έχετε διαμορφώσει κάποια άποψη για την έννοια των όρων *σήμα* και *σύστημα* και είναι πολύ πιθανό να χρησιμοποιείτε αυτούς τους όρους συχνά στην καθημερινή σας ζωή.

Είναι πολύ πιθανό η χρήση και η κατανόηση των παραπάνω όρων να είναι σωστή με την ευρεία έννοια. Για παράδειγμα, ίσως να σκέφτεστε ένα σήμα σαν “κάτι” που μεταφέρει πληροφορίες. Συνήθως, αυτό το κάτι είναι ένα πρότυπο μεταβολών μιας φυσικής ποσότητας που μπορεί να επεξεργαστεί, να αποθηκευτεί, ή να μεταδοθεί με φυσικές διαδικασίες. Μερικά παραδείγματα αποτελούν τα σήματα ομιλίας, τα ακουστικά σήματα, τα σήματα εικόνας και βίντεο, τα βιοϊατρικά σήματα, τα σήματα ραντάρ και τα σεισμικά σήματα. Είναι πολύ σημαντικό στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι τα σήματα μπορούν να

λάβουν πολλές ισοδύναμες μορφές ή αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, ένα σήμα ομιλίας παράγεται σαν ακουστικό σήμα, αλλά μπορεί να μετατραπεί σε ένα ηλεκτρικό σήμα από ένα μικρόφωνο, ή σε ένα πρότυπο μαγνήτισης κατά την καταγραφή του σε μια μαγνητική ταινία, ή ακόμα και σε μια σειρά αριθμών όπως συμβαίνει στην ψηφιακή καταγραφή των ακουστικών σημάτων.

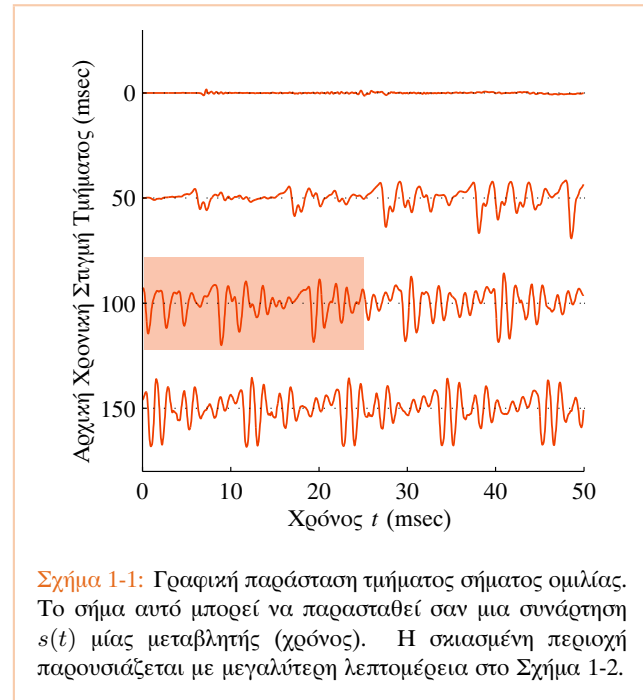
Ο όρος *σύστημα* είναι διαφορεμένος και επομένως επιδέχεται πολλών ερμηνειών. Για παράδειγμα, συχνά χρησιμοποιούμε τη λέξη “σύστημα” για να αναφερθούμε σε μια μεγάλη οργάνωση που διαχειρίζεται ή υλοποιεί διαδικασίες όπως είναι το “σύστημα κοινωνικής ασφάλισης” ή το “σύστημα των αεροπορικών μεταφορών.” Ωστόσο, στα πλαίσια αυτού του βιβλίου, ενδιαφερόμαστε να ορίσουμε με ένα αυστηρότερο τρόπο το σύστημα που συνδέεται πολύ στενά με τα σήματα. Πιο συγκεκριμένα, ένα σύστημα για τους σκοπούς μας, είναι κάτι που μπορεί να χειριστεί, να

τροποποιήσει, να καταγράψει, ή να μεταδώσει σήματα. Για παράδειγμα, κατά την καταγραφή ακουστικών σημάτων σε CD (compact disc) αποθηκεύεται ένα μουσικό σήμα σαν μια ακολουθία αριθμών. Ένα ηχητικό σύστημα αναπαραγωγής CD είναι ένα σύστημα που μετατρέπει αριθμούς, οι οποίοι είναι αποθηκευμένοι σε ένα CD (δηλαδή, η αριθμητική αναπαράσταση του σήματος), σε ένα ακουστικό σήμα το οποίο μπορούμε να το αντιληφθούμε με την ακοή μας. Γενικά, τα συστήματα είναι *τελεστές* που δρουν σε σήματα και παράγουν νέα σήματα ή νέες αναπαραστάσεις σημάτων.

Στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να αναπτύξουμε ένα πλαίσιο που θα μας επιτρέψει να ορίσουμε αυστηρά τα σήματα και τα συστήματα. Συγκεκριμένα, θέλουμε να δείξουμε ότι τα μαθηματικά είναι μια κατάλληλη γλώσσα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή και την κατανόηση των σημάτων και των συστημάτων. Θέλουμε επίσης να δείξουμε ότι η αναπαράσταση των σημάτων και των συστημάτων με μαθηματικές εξισώσεις μας επιτρέπει να καταλάβουμε τον τρόπο με τον οποίο τα σήματα και τα συστήματα αλληλεπιδρούν καθώς και τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να σχεδιάσουμε και να υλοποιήσουμε συστήματα που επιτελούν ένα συγκεκριμένο σκοπό.

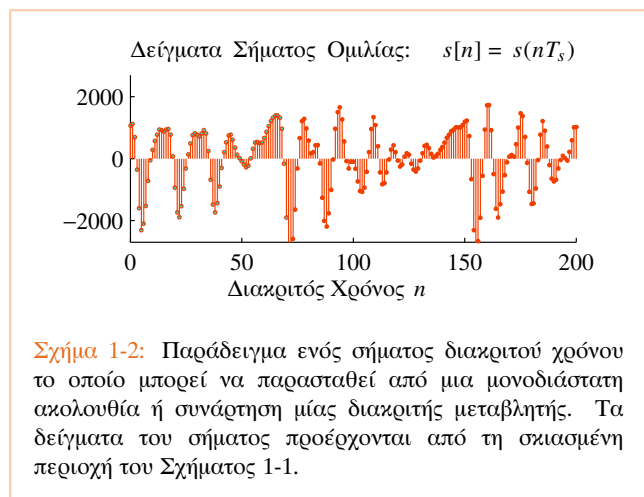
## 1-1 Μαθηματική Περιγραφή των Σημάτων

Τα σήματα είναι πρότυπα μεταβολών που αναπαριστούν ή κωδικοποιούν πληροφορία. Τα σήματα κατέχουν έναν κεντρικό ρόλο στη μέτρηση, στη συστηματική έρευνα και εξέταση φυσικών συστημάτων, στην ιατρική τεχνολογία και στις τηλεπικοινωνίες, για να ονομάσουμε μερικές περιοχές. Πολλά σήματα είναι φυσικό να θεωρηθούν σαν πρότυπα μεταβολών στο χρόνο. Ένα καλό παράδειγμα είναι ένα σήμα ομιλίας, το οποίο αρχικά προκύπτει σαν πρότυπο της μεταβαλλόμενης πίεσης του αέρα στο φάρυγγα. Αυτό το πρότυπο, φυσικά, εξελίσσεται στο χρόνο και δημιουργεί αυτό που συχνά ονομάζουμε *χρονική κυματομορφή*. Στο Σχήμα 1-1 φαίνεται η κυματομορφή ενός σήματος ομιλίας. Στη γραφική παράσταση, ο κατακόρυφος άξονας παριστάνει την πίεση του αέρα ή την τάση του μικροφώνου και ο οριζόντιος άξονας



**Σχήμα 1-1:** Γραφική παράσταση τιμήματος σήματος ομιλίας. Το σήμα αυτό μπορεί να παρασταθεί σαν μια συνάρτηση  $s(t)$  μίας μεταβλητής (χρόνος). Η σκιασμένη περιοχή παρουσιάζεται με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στο Σχήμα 1-2.

παριστάνει το χρόνο. Παρατηρήστε, ότι υπάρχουν τέσσερα χρονικά τμήματα του σήματος ομιλίας. Το δεύτερο τμήμα αποτελεί τη συνέχεια του πρώτου κ.ο.κ., και το μήκος κάθε τμήματος έχει χρονική διάρκεια 50 milliseconds (msec). Το σήμα ομιλίας στο Σχήμα 1-1 είναι ένα παράδειγμα ενός μονοδιάστατου *σήματος συνεχούς χρόνου*. Τέτοια σήματα μπορούν να παρασταθούν ως συναρτήσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, την οποία συμβολίζουμε με  $t$ . Αν και στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν μπορούμε να γράψουμε μια απλή εξίσωση η οποία θα περιγράφει τη γραφική παράσταση του Σχήματος 1-1, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε στη γραφική παράσταση τη συνάρτηση  $s(t)$ . Πράγματι, η γραφική παράσταση από μόνη της μπορεί να θεωρηθεί σαν ορισμός μιας συνάρτησης η οποία εκχωρεί κάθε χρονική στιγμή (κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$ ) έναν αριθμό  $s(t)$ . Πολλά



σήματα, αν όχι τα περισσότερα, είναι σήματα συνεχούς χρόνου. Εντούτοις, για διάφορους λόγους οι οποίοι καθώς θα προχωρούμε θα γίνονται όλο και περισσότερο προφανείς, είναι συχνά επιθυμητό να δημιουργήσουμε μια διακριτού χρόνου παράσταση του σήματος. Αυτό μπορεί να γίνει με τη **δειγματοληψία** του σήματος συνεχούς χρόνου σε συγκεκριμένες ισαπέχουσες χρονικές στιγμές. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι μια ακολουθία αριθμών η οποία μπορεί να παρασταθεί σαν μια συνάρτηση μίας μεταβλητής δείκτη η οποία παίρνει μόνο διακριτές τιμές. Η ακολουθία αυτή μπορεί να παρασταθεί μαθηματικά σαν  $s[n] = s(nT_s)$ , όπου  $n$  είναι ακέραιος, δηλαδή,  $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  και  $T_s$  είναι η **περίοδος δειγματοληψίας**<sup>1</sup>. Αυτό, φυσικά, είναι αυτό που κάνουμε όταν σχεδιάζουμε τις τιμές μιας συνάρτησης σε μια γραφική παράσταση στο τετράδιό μας ή στην οθόνη του υπολογιστή μας. Στην πραγματικότητα, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση σε κάθε δυνατή τιμή μιας συνεχούς μεταβλητής, αλλά μόνο σ' ένα σύνολο τιμών της. Διαισθητικά, ξέρουμε ότι όσο πιο κοντινά

<sup>1</sup>Για την παράσταση των σημάτων συνεχούς χρόνου θα χρησιμοποιούνται οι παρενθέσεις ( ) και οι αγκύλες για την παράσταση των σημάτων διακριτού χρόνου (ακολουθίες).

είναι τα σημεία αυτά, τόσο η προκύπτουσα ακολουθία διατηρεί τη μορφή του αρχικού σήματος συνεχούς χρόνου. Στο Σχήμα 1-2 παρουσιάζεται ένα παράδειγμα ενός τμήματος σήματος διακριτού χρόνου που προήλθε από τη δειγματοληψία του σήματος ομιλίας του Σχήματος 1-1, με περίοδο δειγματοληψίας  $T_s = 1/8$  msec. Στην περίπτωση αυτή η κατακόρυφη γραμμή με την τελεία στο τέλος της, δείχνει τη θέση και την τιμή της ακολουθίας.



**Σχήμα 1-3:** Παράδειγμα σήματος το οποίο μπορεί να παρασταθεί σαν μια συνάρτηση δύο χωρικών μεταβλητών.

Ενώ πολλά σήματα μπορούν να θεωρηθούν σαν πρότυπα εξελισσόμενα στο χρόνο, υπάρχει και μια πληθώρα σημάτων τα οποία δεν μπορούν να θεωρηθούν ως τέτοια. Για παράδειγμα, μια εικόνα αποτελεί ένα χωρικό πρότυπο και επομένως μια κατάλληλη μαθηματική περιγραφή της, προϋποθέτει τη χρήση δύο χωρικών μεταβλητών. Στη γενική περίπτωση, ένα τέτοιο σήμα μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών. Δηλαδή, μια εικόνα μπορούμε να τη συμβολίσουμε ως  $p(x, y)$ . Μια φωτογραφία αποτελεί ένα άλλο παράδειγμα, όπως η “εικόνα με διαβαθμίσεις του γκρι” που φαίνεται στο Σχήμα 1-3. Στην περίπτωση αυτή, η τιμή  $p(x_0, y_0)$



παριστάνει την τιμή του γκρί στη θέση  $(x_0, y_0)$  της εικόνας. Εικόνες όπως αυτές του Σχήματος 1-3 μπορούν γενικά να θεωρηθούν ως σήματα δύο συνεχών μεταβλητών, αφού στη γενική περίπτωση θεωρούμε ότι ο χώρος είναι συνεχής. Οποσδήποτε, η δειγματοληψία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση αυτή για να πάρουμε ένα διακριτό σήμα δύο διαστάσεων. Το σήμα αυτό θα μπορούσε να παρασταθεί από μια ακολουθία δύο διαστάσεων, ή από ένα πίνακα αριθμών, και θα μπορούσε να παρασταθεί σαν  $p[m, n] = p(m\Delta_x, n\Delta_y)$ , όπου και οι δύο μεταβλητές  $m$  και  $n$  παίρνουν μόνο ακέραιες τιμές και  $\Delta_x, \Delta_y$  αποτελούν την οριζόντια και την κατακόρυφη περίοδο δειγματοληψίας αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις δύο μεταβλητών είναι κατάλληλες μαθηματικές παραστάσεις εικόνων οι οποίες δεν αλλάζουν με το χρόνο. Από την άλλη μεριά το σήμα του βίντεο είναι ένα σήμα δύο διαστάσεων εξελισσόμενο στο χρόνο το οποίο απαιτεί μια επιπλέον ανεξάρτητη μεταβλητή για την περιγραφή του, δηλαδή  $v(x, y, t)$ . Τα σήματα βίντεο είναι πραγματικά σήματα τριών μεταβλητών που εξαρτώνται από τον τύπο του συστήματος βίντεο και είναι δυνατόν οι δύο ή ακόμα και οι τρεις μεταβλητές να είναι διακριτές.

Ο σκοπός μας σε αυτήν την ενότητα ήταν απλά να εισάγουμε την ιδέα ότι τα σήματα μπορούν να παρασταθούν από μαθηματικές συναρτήσεις. Αν και σύντομα θα δούμε ότι πολλές γνωστές συναρτήσεις είναι πολύτιμες στη μελέτη των σημάτων και των συστημάτων, δεν έχουμε ακόμη ούτε καν προσπαθήσει να καταδείξουμε αυτό το γεγονός. Η προσπάθεια μας εστιάσθηκε στο να αναδειξουμε τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις συναρτήσεις και τα σήματα και, σε αυτό το σημείο, οι συναρτήσεις χρησιμεύουν απλά ως τα αφηρημένα σύμβολα για τα σήματα. Έτσι, για παράδειγμα, μπορούμε τώρα να αναφερόμαστε στο “σήμα ομιλίας  $s(t)$ ” ή “στη δειγματοληπτημένη εικόνα  $p[m, n]$ .” Αν και αυτό μπορεί να μην φαίνεται ιδιαίτερα σημαντικό, στην επόμενη ενότητα θα δούμε ότι είναι πράγματι ένα πολύ σημαντικό βήμα προς το στόχο μας που είναι η συστηματική χρήση των μαθηματικών στην περιγραφή και παράσταση των σημάτων και των συστημάτων.

## 1-2 Μαθηματική Περιγραφή των Συστημάτων

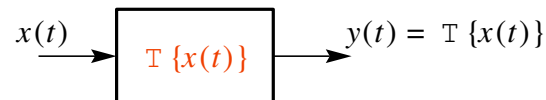
Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ένα σύστημα είναι κάτι που μετασχηματίζει σήματα σε νέα σήματα ή σε διαφορετικές αναπαραστάσεις σημάτων. Αν και αυτός είναι ένας μάλλον αφηρημένος ορισμός, είναι πολύ χρήσιμος σαν αφετηρία. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, θα λέμε ότι ένα μονοδιάστατο σύστημα συνεχούς-χρόνου δέχεται στην είσοδό του ένα σήμα εισόδου  $x(t)$  και παράγει ένα αντίστοιχο σήμα εξόδου  $y(t)$ . Αυτό μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια των μαθηματικών ως εξής

$$y(t) = T\{x(t)\} \quad (1.1)$$

και σημαίνει ότι το σύστημα (που συμβολίζεται με τον τελεστή  $T$ ) δρα στο σήμα εισόδου (κυματομορφή, εικόνα, κ.λ.π.) για να παραχθεί το σήμα εξόδου  $y(t)$ . Ενώ αυτό μπορεί να ακούγεται πολύ αφηρημένο, ένα απλό παράδειγμα θα μας δείξει ότι δεν είναι. Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα το οποίο παράγει στην έξοδό του το τετράγωνο του σήματος που εφαρμόζεται στην είσοδό του. Η μαθηματική περιγραφή αυτού του συστήματος δίνεται από την παρακάτω απλή σχέση

$$y(t) = [x(t)]^2 \quad (1.2)$$

η οποία πολύ απλά λέει ότι κάθε χρονική στιγμή η τιμή της εξόδου του συστήματος είναι ίση με το τετράγωνο της τιμής του σήματος εισόδου την ίδια χρονική στιγμή. Ένα τέτοιο σύστημα λογικά θα μπορούσε να ονομασθεί “σύστημα τετραγώνου”. Στο Σχήμα 1-5 έχει σχεδιαστεί η



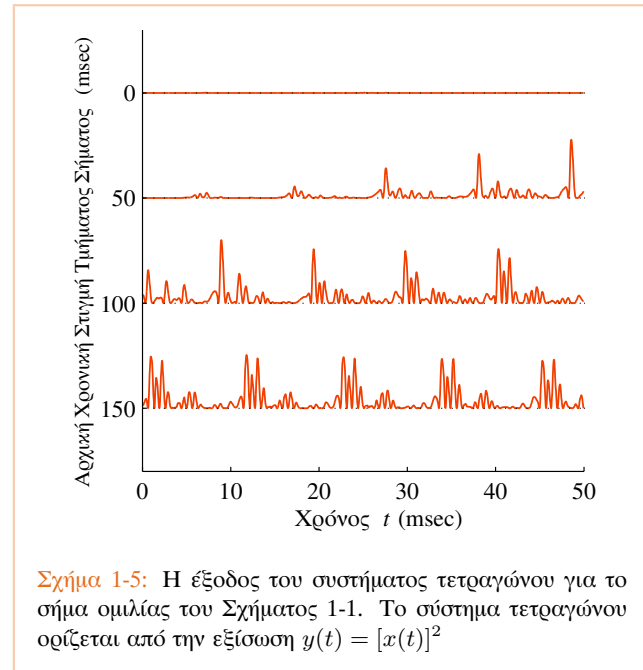
Σχήμα 1-4: Σχηματικό διάγραμμα ενός συστήματος συνεχούς χρόνου.

έξοδος του συστήματος για το σήμα εισόδου του Σχήματος 1-1. Όπως είναι αναμενόμενο από τις ιδιότητες του τελεστή του τετραγώνου, παρατηρούμε ότι το σήμα εξόδου είναι πάντα μη αρνητικό και ότι οι μεγάλες τιμές του σήματος εισόδου είναι περισσότερο ενισχυμένες από τις μικρές. Το σύστημα που ορίσαμε με τη Σχέση (1.2) αποτελεί ένα παράδειγμα ενός *συστήματος συνεχούς χρόνου*, δηλαδή, ενός συστήματος του οποίου η είσοδος και η έξοδος είναι σήματα συνεχούς χρόνου. Μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα φυσικό σύστημα το οποίο θα λειτουργεί όπως το σύστημα τετραγώνου; Η απάντηση είναι ότι το σύστημα της Σχέσης (1.2) μπορεί να προσεγγισθεί διασυνδέοντας κατάλληλα ηλεκτρονικά κυκλώματα. Από την άλλη μεριά, εάν η είσοδος και η έξοδος ενός συστήματος είναι σήματα διακριτού χρόνου (ακολουθίες αριθμών) που συνδέονται όπως δείχνει η σχέση που ακολουθεί

$$y[n] = (x[n])^2 \quad (1.3)$$

θα λέμε ότι είναι ένα *σύστημα διακριτού-χρόνου*. Η υλοποίηση του συστήματος διακριτού χρόνου είναι, μπορούμε να πούμε, τετριμμένη αφού απλά αρκεί να πολλαπλασιάσουμε κάθε τιμή του σήματος διακριτού χρόνου με τον εαυτό της.

Όταν μιλάμε για συστήματα, είναι πολύ χρήσιμο να έχουμε στο μυαλό μας μια οπτική παράσταση του συστήματος. Για το σκοπό αυτό, οι μηχανικοί χρησιμοποιούν *Σχηματικά διαγράμματα* για να παραστήσουν λειτουργίες οι οποίες εκτελούνται σε μια υλοποίηση ενός συστήματος και να παρουσιάσουν τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των πολλών σημάτων που μπορούν να συνυπάρξουν στην υλοποίηση ενός σύνθετου συστήματος. Ένα παράδειγμα σχηματικού διαγράμματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 1-4. Αυτό που παρουσιάζεται στο διάγραμμα είναι απλά ότι το σήμα  $y(t)$  προκύπτει από το σήμα  $x(t)$  και τον τελεστή  $T\{\}$ . Ένα άλλο παράδειγμα συστήματος προτάθηκε νωρίτερα όταν συζητήσαμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ ενός σήματος συνεχούς χρόνου και ενός σήματος διακριτού χρόνου. Επομένως, ορίζουμε το *δειγματολήπτη* ως ένα σύστημα του οποίου η είσοδος είναι ένα σήμα συνεχούς χρόνου  $x(t)$  και του οποίου η έξοδος είναι η ακολουθία

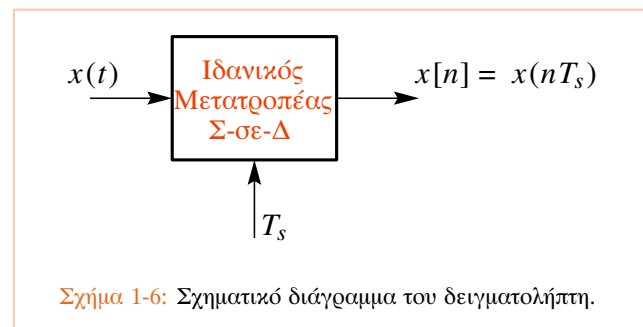


Σχήμα 1-5: Η έξοδος του συστήματος τετραγώνου για το σήμα ομιλίας του Σχήματος 1-1. Το σύστημα τετραγώνου ορίζεται από την εξίσωση  $y(t) = [x(t)]^2$

δειγμάτων που ορίζεται από τη σχέση

$$x[n] = x(nT_s) \quad (1.4)$$

η οποία απλά δηλώνει ότι ο δειγματολήπτης “συλλαμβάνει



Σχήμα 1-6: Σχηματικό διάγραμμα του δειγματολήπτη.

στιγμιαία την τιμή” του σήματος συνεχούς χρόνου που εφαρμόζεται στην είσοδό του, κάθε  $T_s$  δευτερόλεπτα. Κατά συνέπεια, η διαδικασία της δειγματοληψίας ανταποκρίνεται στον ορισμό που δώσαμε για το σύστημα και μπορεί να παρασταθεί με το σχηματικό διάγραμμα του Σχήματος 1-6. Συχνά θα αναφέρουμε το σύστημα του δειγματολήπτη ως “ιδανικό μετατροπέα συνεχούς σε διακριτό” ή *ιδανικό μετατροπέα Σ-σε-Δ*. Σε αυτήν την περίπτωση, όπως στην περίπτωση του συστήματος του τετραγώνου, το όνομα που δίνουμε στο σύστημα είναι μια ακριβής περιγραφή της διαδικασίας που πραγματικά εκτελεί το σύστημα.

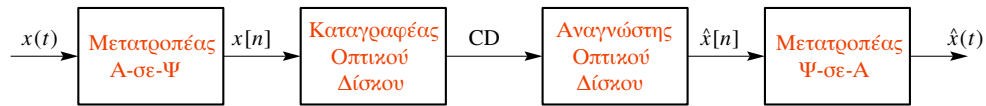
### 1-3 Σκέψεις για τα Συστήματα

Τα Σχηματικά διαγράμματα είναι πολύ χρήσιμα για την παράσταση σύνθετων συστημάτων με τη βοήθεια απλούστερων συστημάτων, τα οποία γίνονται ευκολότερα κατανοητά. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 1-7 φαίνεται ένα Σχηματικό διάγραμμα μίας διαδικασίας καταγραφής και αναπαραγωγής ενός CD. Σ’ αυτό το σχηματικό διάγραμμα το συνολικό σύστημα διαιρείται σε τέσσερα υποσυστήματα. Το πρώτο υποσύστημα περιγράφει ένα μετατροπέα από Αναλογικό-σε-Ψηφιακό. Ένας μετατροπέας Α-σε-Ψ παράγει στην έξοδό του αριθμούς πεπερασμένης ακρίβειας σαν δείγματα του σήματος εισόδου (κβαντισμένα σε ένα περιορισμένο αριθμό από bits), ενώ ο ιδανικός μετατροπέας Σ-σε-Δ παράγει δείγματα της εισόδου με άπειρη ακρίβεια. Για του μετατροπείς Α-σε-Ψ υψηλής πιστότητας που χρησιμοποιούνται σε ακουστικά συστήματα υψηλής πιστότητας, η διαφορά που υπάρχει με τους ιδανικούς μετατροπείς Σ-σε-Δ είναι πολύ μικρή, αλλά η διάκρισή τους είναι πολύ σημαντική. Μόνο κβαντισμένες, πεπερασμένης-ακρίβειας, τιμές δειγμάτων μπορούν να αποθηκευτούν σε μια ψηφιακή μνήμη πεπερασμένου μεγέθους! Στο Σχήμα 1-7 φαίνεται ότι η έξοδος του μετατροπέα Α-σε-Ψ οδηγείται στην είσοδο ενός συστήματος που καταγράφει τους αριθμούς  $x[n]$  πάνω σ’ ένα οπτικό δίσκο. Στην πραγματικότητα αυτή είναι μια πολύ σύνθετη διαδικασία, αλλά για το σκοπό μας είναι αρκετό να παρουσιαστεί απλά σαν μια ενιαία λειτουργία.

Για τον ίδιο λόγο, το σύνθετο μηχανικό/οπτικό σύστημα για την ανάγνωση των αριθμών από τον οπτικό δίσκο εμφανίζεται, κι αυτό, σαν μια ενιαία λειτουργία. Τέλος, η μετατροπή του διακριτού χρόνου σήματος σε συνεχούς χρόνου (ακουστική) μορφή εμφανίζεται σαν ένα σύστημα μετατροπέα από Ψ-σε-Α (Ψηφιακού-σε-Αναλογικό). Αυτό το σύστημα δέχεται σειριακά αριθμούς πεπερασμένης ακρίβειας και παρεμβάλλει τιμές μεταξύ των δειγμάτων. Το συνεχούς χρόνου σήμα που προκύπτει θα μπορούσε στη συνέχεια να οδηγηθεί στην είσοδο άλλων συστημάτων, όπως είναι οι ενισχυτές, τα μεγάφωνα και τα ακουστικά, για τη μετατροπή του σε ηχητικό σήμα. Συστήματα όπως το σύστημα καταγραφής και αναπαραγωγής CD υπάρχουν πολλά γύρω μας. Στις περισσότερες περιπτώσεις δεν υπάρχει λόγος να σκεφτούμε για το πώς λειτουργούν τέτοια συστήματα, αλλά αυτό το παράδειγμα εξηγεί το πόσο σημαντικό είναι να σκεφτόμαστε ένα σύνθετο σύστημα με ένα ιεραρχικό τρόπο. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε πρώτα να καταλάβουμε τα υποσυστήματα, στη συνέχεια τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των υποσυστημάτων, και τελικά ολόκληρο το σύστημα. Ακολουθώντας αυτήν τη διαδικασία στο σύστημα καταγραφής και αναπαραγωγής CD, βλέπουμε ότι ένα πολύ σημαντικό ζήτημα είναι η μετατροπή του σήματος συνεχούς χρόνου σε διακριτού χρόνου και ξανά σε συνεχούς χρόνου και βλέπουμε επίσης ότι είναι δυνατό να εξετάσουμε αυτές τις διαδικασίες χωριστά από τα υπόλοιπα υποσυστήματα από τα οποία απαρτίζεται το συνολικό σύστημα. Η επίδραση της διασύνδεσης των υποσυστημάτων είναι έπειτα σχετικά εύκολο να την κατανοήσουμε. Οι λεπτομέρειες μερικών υποσυστημάτων μπορούν να αφεθούν σε εμπειρογνώμονες άλλων τομέων οι οποίοι, για παράδειγμα, μπορούν να αναπτύξουν περισσότερο τα υποσυστήματα των οπτικών δίσκων.

### 1-4 Το Επόμενο Βήμα

Το σύστημα αναπαραγωγής CD αποτελεί ένα πολύ καλό παράδειγμα ενός συστήματος διακριτού χρόνου (discrete time system). Μέσα σε ένα τέτοιο σύστημα, όπως μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 1-7, περιλαμβάνονται πολλά



Σχήμα 1-7: Απλοποιημένο σχηματικό διάγραμμα συστήματος καταγραφής και αναπαραγωγής CD.

υποσυστήματα και σήματα διακριτού χρόνου. Στο βιβλίο αυτό σίγουρα δεν υποσχόμαστε ότι θα εξηγήσουμε όλες τις λεπτομέρειες ενός Συστήματος αναπαραγωγής CD ή οποιουδήποτε άλλου σύνθετου συστήματος, ελπίζουμε όμως να βάλουμε τα θεμέλια για την κατανόηση των σημάτων και συστημάτων συνεχούς και διακριτού χρόνου έτσι ώστε αυτή η γνώση να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση περισσότερο πολύπλοκων συστημάτων. Στο Κεφάλαιο 2, θα αρχίσουμε με πολύ απλές μαθηματικές έννοιες και θα αποδείξουμε ότι οι πολύ γνωστές τριγωνομετρικές συναρτήσεις του ημιτόνου και του συνημιτόνου παίζουν έναν θεμελιώδη ρόλο στη θεωρία των σημάτων και των συστημάτων. Στη συνέχεια, θα δείξουμε πώς με τη χρησιμοποίηση των μιγαδικών αριθμών μπορούμε

να απλοποιήσουμε την άλγεβρα που υπεισέρχεται στη χρήση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Σε επόμενα κεφάλαια θα εισαγάγουμε την έννοια του φάσματος ενός σήματος και την έννοια του φιλτραρίσματος με ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα. Μέχρι το τέλος του βιβλίου, ο επιμελής αναγνώστης που θα απασχοληθεί με τα προτεινόμενα προβλήματα, θα δει τις πολυάριθμες παρουσιάσεις και θα κάνει όλες τις προτεινόμενες εργαστηριακές ασκήσεις, θα ανταμειφθεί με μια σε βάθος κατανόηση πολλών θεμελιωδών εννοιών που κρύβονται μέσα στα ψηφιακά πολυμεσικά πληροφοριακά συστήματα, που όπως διαφαίνεται αναπτύσσονται στις μέρες μας με γρήγορους ρυθμούς.